Блок 3. Графы

Подготовительное занятие

- В Липецкой области есть только такие маршруты автобусов между парами городами: Липецк–Грязи, Данков–Усмань, Задонск–Данков, Грязи–Елец, Усмань–Лебедянь, Чаплыгин–Грязи, Лебедянь–Задонск, Чаплыгин–Елец, Липецк–Чаплыгин. До каких городов области можно добраться (возможно, с пересадками) на автобусах из Липецка?
- Нарисуйте схемы (графы) к следующим ситуациям:

  (а) Маша дружит с Катей и Дашей, Даша дружит с Машей и Настей, Настя дружит с Дашей и Катей, Катя дружит с Машей и Настей;

  (б) у Олега есть 2 сына Петр и Василий, у Петра есть сыновья Николай, Григорий и Михаил;

  (в) между 9 планетами Солнечной системы летают ракеты по следующим маршрутам: Земля-Меркурий, Плутон- Венера, Земля-Плутон, Плутон-Меркурий, Меркурий-Венера, Уран-Нептун, Нептун-Сатурн, Сатурн-Юпитер, Юпитер-Марс и Марс-Уран;

  (г) пять команд сыграли между собой круговой турнир, то есть каждая команды сыграла с каждой другой ровно один раз;

  (д) из всего набора домино у Оли на руках только 5 костей домино: 1-2, 5-2, 3-3, 5-3 и 2-6.
- В город Елец прилетела летающая тарелка с Марса. В ней трое пятируких марсиан, трое трехруких марсиан и шестеро двуруких марсиан.

  (а) Сколько всего рук у прилетевших марсиан?

  (б) Руки у марсиан длинные и изгибающиеся. Они все взялись за руки так, что не осталось свободных рук. Сколько получилось рукопожатий?

  (в)Могут ли они взяться все за руки, если пятируких марсиан не 3, а 4?

1. На кружке по математике 7 человек: Антон, Боря, Вова, Глеб, Дима, Евгений и Жора. Известно, что в этой компании у Антона 6 друзей, у Бори — 5, у Вовы и Глеба — по 3, у Димы и Евгения — по 2, у Жоры — всего 1. Выберите всех мальчиков, с которыми дружит Глеб.
2. На концерте каждую песню исполняли двое артистов. Всего было 12 артистов, каждый выступил по 5 раз. Сколько было песен?

3. В волшебной стране есть один Цветочный город, 5 городов фей, 15 городов драконов. Из цветочного города выходит 20 дорог, из городов фей и драконов выходит по 5 дорог. Сколько всего дорог в волшебной стране?
4. В некотором государстве 10 городов и 20 дорог. Авиалиния есть между двумя городами в том и только в том случае, если между ними нет дороги. Сколько авиалиний в таком государстве?
5. (а) В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с пятью другими?

   (б) Можно ли придумать семь таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с пятью другими?

   (в) Можно ли разрезать прямоугольник 5×18 на доминошки так, чтобы каждая граничила ровно с тремя другими по отрезку ненулевой длины?

   (г) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
6. Вершины графа покрасили в два цвета: красный и синий. Из красных вершин есть ребра только в синие, а из синих — только в красные. Сумма степеней красных вершин — 20. Какой может быть сумма степеней синих?
7. На дискотеке было 6 девочек и 8 мальчиков. Каждая девочка станцевала с 4 мальчиками. Все мальчики танцевали с одинаковым количеством девочек. Со сколькими девочками танцевали мальчики?
8. В классе 26 школьников, из которых 9 — девочки. Каждый мальчик дружит с 5 одноклассницами. Каждая из девочек, кроме Маши, дружит с 9 мальчиками-одноклассниками. Со сколькими мальчиками-одноклассниками дружит Маша?
9. В графе каждая вершина покрашена в синий или зеленый цвет. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелеными, а каждая зеленая — с девятью синими и шестью зелеными.

   (а) Каких вершин больше — синих или зеленых?

   (б) Каким может быть наименьшее число синих и зеленых вершин такого графа?

Блок 3. Графы

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

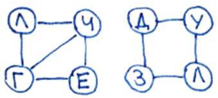
В первой части занятия в процессе обсуждения задач, отмеченных точкой, можно ввести понятие графа и заметить простые закономерности, связанные с графами. Краткое изложение обсуждения приведено в комментариях к решениям. Также в комментарии вынесены факты, которые несут роль теории: определения (граф, степень вершины) и теоремы (количество ребер графа, четность суммы степеней вершин).

В задаче № 6 вводится понятие двудольного графа, который возникаем во многих текстовых задачах (здесь — задача № 7). Рекомендуем разобрать эту задачу во время занятия.

- В Липецкой области есть только такие маршруты автобусов между парами городами: Липецк–Грязи, Данков–Усмань, Задонск–Данков, Грязи–Елец, Усмань–Лебедянь, Чаплыгин–Грязи, Лебедянь–Задонск, Чаплыгин–Елец, Липецк–Чаплыгин. До каких городов области можно добраться (возможно, с пересадками) на автобусах из Липецка?

  Ответ: только до Грязей, Ельца и Чаплыгина.

  Решение. Схема связи между городами выглядит следующим образом.

  Комментарий. Города, связанные автобусными маршрутами, удобно изобразить в виде картинки. Заметим, что в картинке нам не важно взаимное расположение городов, длины дорог или их форма (прямые или нет). Важно: есть соединение или его нет.

  Именно такие схемы называют графами: объекты обычно изображают точками (это вершины графа), соединение изображают линиями (ребрами графа).

  Определение. *Граф* — множество вершин (точек), некоторые из которых соединены ребром (линией).

- Нарисуйте схемы (графы) к следующим ситуациям:

  (а) Маша дружит с Катей и Дашей, Даша дружит с Машей и Настей, Настя дружит с Дашей и Катей, Катя дружит с Машей и Настей;

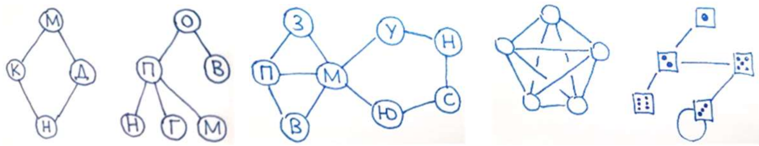
  (б) у Олега есть 2 сына Петр и Василий, у Петра есть сыновья Николай, Григорий и Михаил;

  (в) между 9 планетами Солнечной системы летают ракеты по следующим маршрутам: Земля-Меркурий, Плутон- Венера, Земля-Плутон, Плутон-Меркурий, Меркурий-Венера, Уран-Нептун, Нептун-Сатурн, Сатурн-Юпитер, Юпитер-Марс и Марс-Уран;

  (г) пять команд сыграли между собой круговой турнир, то есть каждая команды сыграла с каждой другой ровно один раз;

  (д) из всего набора домино у Оли на руках только 5 костей домино: 1-2, 5-2, 3-3, 5-3 и 2-6.

  Ответ: см. рисунки.

  Указания. В пунктах (а)-(в) вершины и ребра очевидны.

  (г) вершины графа — команды, ребром соединены те, которые сыграли между собой.

  (д) вершины графа — количество очков (от 0 до 6), ребро — кость домино. Заметьте, что кость 3-3 изображается ребром, которое начинается и заканчивается в одной вершине. Такие ребра называют петлями.

  Комментарий. Графами можно иллюстрировать ситуации, где есть несколько объектов, между которыми бывает связь. В качестве вершин и ребер могут выступать, например: люди и дружба, города и дороги, люди и сыгранные игры. Какие еще примеры вы можете привести?

- В город Елец прилетела летающая тарелка с Марса. В ней трое пятируких марсиан, трое трехруких марсиан и шестеро двуруких марсиан.

  (а) Сколько всего рук у прилетевших марсиан?

  (б) Руки у марсиан длинные и изгибающиеся. Они все взялись за руки так, что не осталось свободных рук. Сколько получилось рукопожатий?

  (в)Могут ли они взяться все за руки, если пятируких марсиан не 3, а 4?

  Указание. Результат пункта (а) нужен для решения пункта (б), а способ решения пункта (б) — для решения пункта (в).

  (а) Ответ: $3 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 36$.

  (б) Ответ: 18.

Решение. В каждом рукопожатии участвует две руки, поэтому число рукопожатий вдвое меньше числа рук. Оно равно 36 : 2 = 18.

(в) Указание. Постарайтесь найти число рукопожатий в этом случае.

Ответ: не могут.

Решение. Допустим, это возможно. Тогда у марсиан $4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 41$ рук. Тогда число рукопожатий $41 : 2 = 20{,}5$, что невозможно.

Комментарий 1. В данной задаче рисовать схему рукопожатий не нужно. Но речь идёт об объектах (марсианах), и связях между ними (есть рукопожатие или нет). Про каждую вершину такого графа известно число ребер, выходящих из неё.

Определение. *Степень вершины* графа — количество выходящих из нее ребер.

✓ Для каждого из графов в пунктах (а)-(д) предыдущей задачи найдите число вершин и число ребер. Около каждой вершины укажите её степень.

Комментарий 2. Пункт (б) иллюстрирует следующую закономерность.

Теорема (о подсчёте числа ребер). В любом графе сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер.

Доказательство 1. Число концов ребер равно сумме степеней вершин. Концы объединяются в пары. Поэтому число ребер вдвое меньше.

Доказательство 2. Если ребер нет, то всё верно. Каждое возникающее ребро увеличивает сумму степеней на 2, а число ребер — на 1.

Комментарий 3. Пункт (в) иллюстрирует следующую закономерность.

Теорема (о чётности суммы степеней вершин). В любом графе сумма степеней вершин чётна.

Доказательство. Так как сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер, а число ребер — целое число, то сумма степеней чётна.

Можно не находить всю сумму степеней. Как известно, чётность суммы зависит от числа нечётных слагаемых. Поэтому, имеет место такое следствие.

Следствие. В любом графе число вершин с нечётной степенью чётно.

Задачи для самостоятельного решения.

1. На кружке по математике 7 человек: Антон, Боря, Вова, Глеб, Дима, Евгений и Жора. Известно, что в этой компании у Антона 6 друзей, у Бори — 5, у Вовы и Глеба — по 3, у Димы и Евгения — по 2, у Жоры — всего 1. Выберите всех мальчиков, с которыми дружит Глеб.

Решение. Антон дружит со всеми, а Жора только с одним человеком. Значит, Жора дружит только с Антоном.

Боря дружит со всеми, кроме одного. Поскольку он точно не дружит с Жорой, то он дружит с Антоном, Вовой, Глебом, Димой и Евгением.

Получается, что Дима и Евгений дружат с Антоном и Борей и больше ни с кем дружить не могут. Так как Глеб не дружит только с 3 людьми и это точно Жора, Дима и Евгений, то он дружит с остальными, а именно с Антоном, Борей и Вовой.

Комментарий. Проиллюстрируйте приведенные рассуждения картинками самостоятельно.

2. На концерте каждую песню исполняли двое артистов. Всего было 12 артистов, каждый выступил по 5 раз. Сколько было песен?

   Ответ: 30.

   Решение. Рассмотрим граф: артисты — его вершины, их совместные выступления — ребра. По условию в нём 12 вершин, степень каждой из них равна 5. Значит, количество ребер равно $12 \cdot 5 : 2 = 30$. Это и есть количество песен.

3. В волшебной стране есть один Цветочный город, 5 городов фей, 15 городов драконов. Из цветочного города выходит 20 дорог, из городов фей и драконов выходит по 5 дорог. Сколько всего дорог в волшебной стране?

   Ответ: 60.

   Решение. Рассмотрим граф: города — вершины, ребра — дороги. Тогда количество ребер (дорог) равно $(1 \cdot 20 + 5 \cdot 5 + 15 \cdot 5) : 2 = 60$.

4. В некотором государстве 10 городов и 20 дорог. Авиалиния есть между двумя городами в том и только в том случае, если между ними нет дороги. Сколько авиалиний в таком государстве?

   Ответ: 25.

   Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины — города, а ребра двух видом: синие — дороги, красные — авиалинии. Из каждого города выходит 9 ребер, так как дорога или авиалиния идёт в каждый из остальных городов. Поэтому всего $10 \cdot 9 : 2 = 45$ ребер. По условию есть 20 синих ребер. Значит, красных ребер (авиалиний) $45 - 20 = 25$.

5. (а) В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с пятью другими?

   (б) Можно ли придумать семь таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с пятью другими?

(в) Можно ли разрезать прямоугольник 5×18 на доминошки так, чтобы каждая граничила ровно с тремя другими по отрезку ненулевой длины?

(г) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Указание. Данные пункты объединены в одну задачу от того, что их решения используют один и тот же факт: в любом графе сумма степеней вершин чётна.

(а) Ответ: нельзя.

Решение (подсчёт). Рассмотрим граф: телефоны — вершины, провода — ребра. Пусть это возможно, тогда количество ребер (проводов) равно $15 \cdot 5 : 2$ — нецелое число. Такое невозможно.

Комментарий. В указанном графе сумма степеней вершин равна $15 \cdot 5$ — нечётное число, что противоречит теореме о сумме степеней вершин.

(б) Ответ: нельзя.

Указание. Аналогично пункту (а) для графа с вершинами — словами. В нём две вершины (слова) соединены ребром, если имеют хотя бы одну общую букву. В нём сумма степеней вершин равна $7 \cdot 5$ — она нечётна.

(в) Ответ: нельзя.

Указание. Рассмотрим граф, в котором доминошки — вершины. Всего в графе $5 \cdot 18 : 2 = 45$ вершин. Они соединены ребром, если граничат по отрезку ненулевой длины. Тогда сумма степеней вершин равна $45 \cdot 3$ — нечётное число.

(г) Ответ: нельзя.

Указание. Рассмотрим граф, в котором отрезки — вершины. Они соединены ребром, если пересекаются. Сумма степеней вершин равна $9 \cdot 3$ — нечётна.

6. Вершины графа покрасили в два цвета: красный и синий. Из красных вершин есть ребра только в синие, а из синих — только в красные. Сумма степеней красных вершин — 20. Какой может быть сумма степеней синих?

Ответ: 20.

Решение. У каждого ребра один конец синий, другой — красный. Количество красных концов равно 20, значит, сумма синих концов также равна 20.

Комментарий. Заметив, в данном графе вершины разделены на две группы. При этом каждое ребро соединяет вершину одной группы с вершиной другой группы. Такие графы называют *двудольными*. В данной задаче предложили понять, что сумма степеней вершин одной группы равна сумме степеней вершин другой группы.

7. На дискотеке было 6 девочек и 8 мальчиков. Каждая девочка станцевала с 4 мальчиками. Все мальчики танцевали с одинаковым количеством девочек. Со сколькими девочками танцевали мальчики?

Ответ: 3.

Решение. Девочки станцевали $6 \cdot 4 = 24$ танцев, мальчики — тоже. Каждый из них танцевал с $24 : 8 = 3$ девочками.

Комментарий 1. Решение задачи — рассуждения про двудольный граф. В нём дети — вершины, ребра — пары на танцах. Сумма степеней вершин-девочек равна $6 \cdot 4 = 24$. Тогда сумма степеней вершин-мальчиков также равна 24. Значит, каждый мальчик танцевал $24 : 8 = 3$ раза.

Комментарий 2. Предложите ученикам нарисовать такой двудольный граф: 6 вершин-девочек со степенями 4 и 8 вершин-мальчиков со степенями 3.

8. В классе 26 школьников, из которых 9 — девочки. Каждый мальчик дружит с 5 одноклассницами. Каждая из девочек, кроме Маши, дружит с 9 мальчиками-одноклассниками. Со сколькими мальчиками-одноклассниками дружит Маша?

Ответ: 13.

Решение. Рассмотрим граф, в котором 9 вершин-девочек и $26 - 9 = 17$ вершин-мальчиков. Каждая дружба между мальчиком и девочкой — ребро графа. Сумма степеней вершин-мальчиков равна $17 \cdot 5 = 85$. Сумма степеней вершин-девочек равна $9 \cdot (9 - 1) + n = 72 + n$, где n — искомое число. Значит, $72 + n = 85$, откуда $n = 13$.

9. В графе каждая вершина покрашена в синий или зеленый цвет. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелеными, а каждая зеленая — с девятью синими и шестью зелеными.

(а) Каких вершин больше — синих или зеленых?

(б) Каким может быть наименьшее число синих и зеленых вершин такого графа?

Ответ: (а) зелёных больше, (б) 38 вершин.

Решение. (а) Пусть в графе B синих вершин и G зеленых вершин. Количество ребер с разными концами равно $10B = 9G$, откуда $B = 9t$, $G = 10t$. Значит, зелёных вершин больше.

(б) Чем меньше t, тем меньше вершин. Рассмотрим граф из синих вершин и ребер между ними. Сумма степеней $9t$ вершин равна $5 \cdot 9t = 45t$. Она должна быть чётна, поэтому t не менее 2.

При $t = 2$ можно построить пример такого графа, у него 38 вершин. Оставим это в качестве упражнения: покажите, как соединить между собой синие вершины, как — зеленые, как провести ребра с концами разных цветов.