

Блок 2. Геометрия: отрезки и углы

Интернет-карусель (2019-2020). Условия задач

Во всех задачах углом считается часть плоскости, ограниченная лучами, между которыми от 0° до 180° . В задачах о часах стрелки движутся непрерывно с постоянной скоростью.

1. Точки A, B, C расположены на одной прямой в указанном порядке, $AB : BC = 2 : 3$, $AB = 10$. Найдите длину отрезка AC .
2. Угол AOB равен 50° , а угол AOC в 5 раз меньше угла AOB . Сколько градусов составляет величина угла BOC ?
3. На отрезке AC отмечена точка B , $AB : BC = 2 : 1$. На отрезке AB отмечена точка D , $AD : DB = 3 : 2$. Во сколько раз отрезок CD больше отрезка AD ?
4. Сколько градусов составляет угол между минутной и часовой стрелкой в 7 часов 15 минут?
5. На прямой отметили 5 точек. Нашли длины всех отрезков с концами в этих точках. Получили 10 целых чисел, девять из которых 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5. Какое пропущенное 10-е число?
6. На сколько областей разбивают плоскость 4 прямые, если среди которых нет параллельных и ни в какой точке не пересекаются более 2 прямых?
7. Через точку проходят 10 прямых, которые делят плоскость на 20 непересекающихся углов. Какое наименьшее количество этих углов могут быть меньше 39° ?
8. На прямой расположены отрезок AB длины 54 и точка M , которая на 20 % ближе к точке A , чем к точке B . Чему равна длина отрезка AM ?
9. На какое наименьшее число частей могут разделить плоскость 6 прямых?
10. На плоскости нарисованы лучи OA, OB, OC, OD . Лучи OB и OC лежат внутри угла AOD , OC и OB являются биссектрисами каких-то углов на полученном чертеже. Сколько градусов может составлять угол AOB , если угол AOD равен 132° ?
11. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость 5 прямых, если среди этих частей нет ни одного треугольника?
12. Точки A, B, C, D и E лежат на одной прямой. Точка D — середина отрезка AB , точка E — середина отрезка AC . Найдите длину отрезка BC , если $DE = 13$.
13. Точки A, B, C, D расположены так, что $BD = 9, BC = 13, AD = 7, AC = 29$. Чему равна длина отрезка AB ?

14. У Лёни на стене висят верно идущие часы. Он заметил, что за 20 минут угол между часовой и минутной стрелками стал больше на 50° . Сколько градусов теперь составляет угол между этими стрелками?
15. На красной прямой отмечены точки A и B , $AB = 20$. Зеленым отметили все точки, которые ближе к точке B , чем к точке A , и удаленные от точки B на расстояние не больше 50. Зеленые точки образовали зеленый отрезок. Какова его длина?
16. Точки A, B, C, D расположены так, углы AOC, BOC, BOD, AOD равны соответственно $10^\circ, 13^\circ, 17^\circ, 40^\circ$. Сколько градусов составляет угол AOB ?
17. При пересечении 2 прямых получается 4 угла. Оказалось, что сумма двух из них равна удвоенной сумме двух других. Какова градусная мера большего из этих четырех углов?
18. Точка E — середина отрезка AB . На отрезках AE и BE взяты точки X и Y , причём $AX : XE = EY : YB$. Чему равно XY , если $AB = 120$?

Блок 2. Геометрия: отрезки и углы

Интернет-карусель (2019-2020). Указания, ответы и решения

Во всех задачах углом считается часть плоскости, ограниченная лучами, между которыми от 0° до 180° . В задачах о часах стрелки движутся непрерывно с постоянной скоростью.

1. Точки A, B, C расположены на одной прямой в указанном порядке, $AB : BC = 2 : 3$, $AB = 10$. Найдите длину отрезка AC .

Ответ: 25.

Решение. Если $AB : BC = 2 : 3$, то для некоторого t получаем $AB = 2t$, $BC = 3t$. Тогда $2t = 10$, $t = 5$. Найдём искомую длину: $AC = AB + BC = 5t = 25$.

2. Угол AOB равен 50° , а угол AOC в 5 раз меньше угла AOB . Сколько градусов составляет величина угла BOC ?

Ответ: 40, 60.

Решение. Из условия $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle AOC = 10^\circ$.

Если луч OC внутри угла AOB , то $\angle BOC = \angle AOB - \angle AOC = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$.

Если луч OC вне угла AOB , то $\angle BOC = \angle AOB + \angle AOC = 50^\circ + 10^\circ = 60^\circ$.

3. На отрезке AC отмечена точка B , $AB : BC = 2 : 1$. На отрезке AB отмечена точка D , $AD : DB = 3 : 2$. Во сколько раз отрезок CD больше отрезка AD ?

Ответ: 1,5.

Решение. Для некоторого t получаем: $AC = 15t$, $AB = 2/3 \cdot 15t = 10t$, $BC = 5t$. Тогда $AD = 3/5 \cdot 10t = 6t$, $BD = 4t$. Точки расположены в порядке $A-D-B-C$, поэтому $CD = BD + BC = 4t + 5t = 9t$. Искомое отношение равно $CD : AD = 9t : 6t = 1,5$.

4. Сколько градусов составляет угол между минутной и часовой стрелкой в 7 часов 15 минут?

Ответ: 127,5.

Решение. Части от деления «3» на часах, где расположена минутная стрелка, до деления «7» соответствует угол 120° . За 15 минут часовая стрелка сдвинется на четверть часа, за час она сдвигается на 30° . Значит, искомый угол составляет $120^\circ + 1/4 \cdot 30^\circ = 127,5^\circ$.

5. На прямой отметили 5 точек. Нашли длины всех отрезков с концами в этих точках. Получили 10 целых чисел, девять из которых 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5. Какое пропущенное 10-е число?

Ответ: 2, 4, 6.

Решение. Назовём отрезки начальными, если они с концами в соседних отмеченных точках. Всего таких 4 штуки, три из которых имеют длину 1. Пусть четвёртый из них имеет длину n . Есть только два принципиально различных варианта взаимного расположения начальных отрезков: 1-1-1- n и 1-1- n -1.

Вариант 1. Есть отрезки длины 1, 1, 1, 2, 2, 3 и еще отрезки длины $n, n + 1, n + 2, n + 3$, три из которых равны 3, 4, 5. Значит, либо $n = 2$, либо $n = 3$. В этих случаях пропущенное число соответственно либо 2, либо 6.

Вариант 2. Есть отрезки длины 1, 1, 1, 2 и еще отрезки длины $n, n + 1, n + 1, n + 2, n + 2, n + 3$, пять из которых равны 2, 3, 3, 4, 5. Значит, $n + 2 = 4$, $n = 2$. В этом случае пропущено число 4.

6. На сколько областей разбивают плоскость 4 прямые, если среди которых нет параллельных и ни в какой точке не пересекаются более 2 прямых?

Ответ: 11.

Указание. Не трудно нарисовать картинку и посчитать количество областей.

Замечание. Имеет место такой факт: n прямых, среди которых нет параллельных и ни в какой точке не пересекаются более 2 прямых, делят плоскость на $1 + n \cdot (n + 1) : 2$ областей. В данном случае $1 + 4 \cdot 5 : 2 = 11$.

7. Через точку проходят 10 прямых, которые делят плоскость на 20 непересекающихся углов. Какое наименьшее количество этих углов могут быть меньше 39° ?

Ответ: 12.

Решение. Так как $360 : 39 > 9$, то получилось не более 9 углов, больших 39° . Поскольку все углы разбиваются на пары вертикальных, то таких углов их не более 8. Тогда углов менее 39° получается не менее 12. С другой стороны, можно так расположить прямые, что будет 8 углов по 39° , а остальные — по 4° .

8. На прямой расположены отрезок AB длины 54 и точка M , которая на 20 % ближе к точке A , чем к точке B . Чему равна длина отрезка AM ?

Ответ 24, 216.

Решение. Если точка M на 20 % ближе к точке A , чем к точке B , то для некоторого числа t имеем $MB = 5t$, $MA = 4t$.

Если точка M на отрезке AB , то $AB = AM + MB = 9t = 54$, $t = 6$, $AM = 4t = 24$.

Если точка M вне отрезка AB , то $AB = BM - AM = t = 54$, $AM = 4t = 216$.

9. На какое наименьшее число частей могут разделить плоскость 6 прямых?

Ответ: 7.

Решение. Одна прямая делит плоскость на 2 части. Когда проводишь еще одну прямую, то добавляется по крайней мере одна часть. Тогда 6 прямых делят плоскость не менее чем на $2 + 5 = 7$ частей. Остаётся заметить, что 6 параллельных прямых делят плоскость ровно на 7 частей.

10. На плоскости нарисованы лучи OA, OB, OC, OD . Лучи OB и OC лежат внутри угла AOD , OC и OB являются биссектрисами каких-то углов на полученном чертеже. Сколько градусов может составлять угол AOB , если угол AOD равен 132° ?

Ответ: 33, 44, 66, 88, 99.

Решение. Рассмотрим варианты расположения лучей.

(1) Если луч OB — биссектриса угла AOD , то $\angle AOB = 66^\circ$ (при этом луч OC может быть биссектрисой угла AOB или угла BOD).

(2) Если луч OC — биссектриса угла AOD , то $\angle AOB = 33^\circ$ (если луч OB — биссектриса угла AOC) или $\angle AOB = 99^\circ$ (если луч OB — биссектриса угла COD).

(3) Остается вариант, когда ни один из лучей OB и OC не являются биссектрисами угла AOD . Тогда либо луч OB — биссектриса угла AOC , луч OC — биссектриса угла DOB (получаем $\angle AOB = 66^\circ$), либо наоборот, луч OC — биссектриса угла AOB , луч OB — биссектриса угла DOC (получаем $\angle AOB = 88^\circ$).

Замечание 1. Нарисуйте картинку к каждому из описанных случаев.

Замечание 2. Полезно рассмотреть не только рассмотреть, в каких случаях такое возможно, но и то, как можно организовать перебор всех возможных случаев.

11. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость 5 прямых, если среди этих частей нет ни одного треугольника?

Ответ: 12.

Решение. Заметим, если три прямые попарно пересекаются, то они отделяют треугольник. Проводя другие прямые, этот треугольник нельзя разделить на части, среди которых нет треугольников. Вывод: либо все прямые параллельны, либо разбиваются на 2 группы попарно параллельных прямых, либо проходят через одну точку.

Теперь достаточно рассмотреть 4 случая:

- (1) если прямые параллельны, то будет 6 частей,
- (2) если 4 параллельные прямые пересекаются пятой, то будет 10 частей,
- (3) если 3 параллельные прямые пересекаются 2 параллельными прямыми, то будет 12 частей,
- (4) если проходят через одну точку, то будет 10 частей.

Наибольшее количество — 12.

12. Точки A, B, C, D и E лежат на одной прямой. Точка D — середина отрезка AB , точка E — середина отрезка AC . Найдите длину отрезка BC , если $DE = 13$.

Ответ: 26.

Решение. Пусть точка A лежит между точками B и C . Тогда $DE = DA + AE = AB : 2 + AC : 2 = BC : 2$, откуда $BC = 2DE = 26$.

Пусть точка A не лежит между точками B и C . Тогда $DE = |DA - AE| = |AB - AC| : 2 = BC : 2$, откуда $BC = 2DE = 26$.

13. Точки A, B, C, D расположены так, что $BD = 9, BC = 13, AD = 7, AC = 29$. Чему равна длина отрезка AB ?

Ответ: 16.

Решение. Так как $29 = 7 + 9 + 13, AC = AD + DB + BC$, то однозначно определяется порядок следования точек: $A-D-B-C$. Получаем $AB = AD + DB = 7 + 9 = 16$.

Комментарий. Сравните данную задачу с задачей № 16.

14. У Лёни на стене висят верно идущие часы. Он заметил, что за 20 минут угол между часовой и минутной стрелками стал больше на 50° . Сколько градусов теперь составляет угол между этими стрелками?

Ответ: 80 150.

Решение. За 20 минут часовая стрелка сдвинется на треть расстояния между часовыми делениями, то есть на $360^\circ : 12 : 3 = 10^\circ$, минутная — на треть круга, то есть на $360^\circ : 3 = 120^\circ$.

Есть 2 случая: (1) если минутная стрелка перегнала часовую в течение 20 минут, (2) если она «убежала» от часовой. Пусть угол между стрелками был равен α .

(1) Через 20 минут угол станет $120^\circ - 10^\circ - \alpha = 110^\circ - \alpha$ (это менее 180°). Из условия $110^\circ - \alpha = \alpha + 50^\circ, \alpha = 30^\circ$. Новый угол будет равен $30^\circ + 50^\circ = 80^\circ$.

(2) Через 20 минут угол станет $\alpha + 120^\circ - 10^\circ = \alpha + 110^\circ$. Если этот угол не более 180° , то он не равен $\alpha + 50^\circ$. Если $\alpha + 110^\circ > 180^\circ$, то угол между стрелками равен $360^\circ - (\alpha + 110^\circ) = 250^\circ - \alpha$. Получаем $250^\circ - \alpha = \alpha + 50^\circ, \alpha = 100^\circ$. Новый угол будет равен $100^\circ + 50^\circ = 150^\circ$.

15. На красной прямой отмечены точки A и $B, AB = 20$. Зеленым отметили все точки, которые ближе к точке B , чем к точке A , и удаленные от точки B на расстояние не больше 50. Зеленые точки образовали зеленый отрезок. Какова его длина?

Ответ: 60.

Решение. Зеленые точки образуют отрезок, один конец которого — середина AB , другой расположен на продолжении отрезка за точку B на расстоянии 50 от точки B . Значит, его длина равна $20 : 2 + 50 = 60$.

16. Точки A, B, C, D расположены так, углы AOC, BOC, BOD, AOD равны соответственно $10^\circ, 13^\circ, 17^\circ, 40^\circ$. Сколько градусов составляет угол AOB ?

Ответ: 23.

Решение. Так как $10^\circ + 13^\circ + 17^\circ = 40^\circ$, то угол AOD состоит из непересекающихся углов AOC, COB, BOD . Тогда $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB = 10^\circ + 13^\circ = 23^\circ$.

Комментарий. Сравните данную задачу с задачей № 13.

17. При пересечении 2 прямых получается 4 угла. Оказалось, что сумма двух из них равна удвоенной сумме двух других. Какова градусная мера большего из этих четырёх углов?

Ответ: 120.

Решение. При пересечении 2 прямых получается две пары равных (вертикальных) углов, в одной паре они равны α , в другой — $180^\circ - \alpha$. Из условия $2\alpha = 180^\circ - \alpha, \alpha = 60^\circ$. Значит, углы равны 60° и 120° .

18. Точка E — середина отрезка AB . На отрезках AE и BE взяты точки X и Y , причём $AX : XE = EY : YB$. Чему равно XY , если $AB = 120$?

Ответ: 60.

Решение. Равные отрезки AE и BE делятся в равных отношениях. Значит, $AX = EY = a, XE = YB = b$. Получаем: $AB = 2a + 2b, XY = a + b$. Значит, $XY = AB : 2 = 60$.