Блок 2. Геометрия: отрезки и углы

Подготовительное занятие

- Точки A, B, C расположены на прямой в указанном порядке, $AB : BC = 3 : 4$. Найдите отношения $AB : AC$ и $BC : AC$.
- Угол AOB — прямой. Угол AOC в полтора раза больше угла AOB. Найдите величину угла BOC.
- Точки A, B, C и D лежат на одной прямой в указанном порядке. Известно, что $AB : BD = 2 : 3$, $AC : CD = 7 : 5$. Во сколько раз отрезок AD больше отрезка BC?
- Точки A, B, M расположены на одной прямой, причём отрезок AM вдвое больше отрезка BM. Найдите AM, если $AB = 6$.

1. На прямой отмечены точки A, B и C. Известно, что $AB = 5$, отрезок AC длиннее BC в полтора раза. Найдите отрезки AC и BC.
2. Угол AOB равен 40°, а угол BOC равен 80°. Чему равен угол между биссектрисами углов AOB и BOC? Рассмотрите все возможные случаи.
3. Точки A, B, C, D последовательно расположены на одной прямой, $AB : BC = 3 : 4$, $BC : CD = 2 : 5$. Найдите отношение $AB : CD$.
4. Найдите величину угла между часовой и минутной стрелкой часов в 10:40.
5. Отрезок AD, длина которого равна 28, разделен точками B и C на три отрезка AB, BC и CD. Расстояние между серединами отрезков AB и CD равно 16. Найдите длину отрезка BC.
6. На прямой отметили четыре точки A, B, C и D. Они являются концами шести отрезков. Выписали длины этих отрезков (в порядке возрастания). Могли ли быть выписаны числа: (а) 1, 2, 3, 4, 5, 6; (б) 1, 1, 1, 2, 2, 4?
7. Начертите четыре луча OA, OB, OC и OD с общим началом так, чтобы на этом чертеже нашлись углы в 100°, 110°, 120°, 130° и 140°.
8. Провели 4 прямые так, что любые две из них пересекаются. Отметили все точки пересечения этих прямых. Сколько точек могло быть отмечено, если
(а) никакие три прямые не проходят через одну точку;
(б) могут найтись тройки прямых, проходящий через одну точку?
9. (а) Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 7 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 3 точки?

   (б) Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 11 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 4 точки?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2019-2020 учебный год

Блок 2. Геометрия: отрезки и углы

Подготовительное занятие

- Точки A, B, C расположены на прямой в указанном порядке, $AB : BC = 3 : 4$. Найдите отношения $AB : AC$ и $BC : AC$.
- Угол AOB — прямой. Угол AOC в полтора раза больше угла AOB. Найдите величину угла BOC.
- Точки A, B, C и D лежат на одной прямой в указанном порядке. Известно, что $AB : BD = 2 : 3$, $AC : CD = 7 : 5$. Во сколько раз отрезок AD больше отрезка BC?
- Точки A, B, M расположены на одной прямой, причём отрезок AM вдвое больше отрезка BM. Найдите AM, если $AB = 6$.

1. На прямой отмечены точки A, B и C. Известно, что $AB = 5$, отрезок AC длиннее BC в полтора раза. Найдите отрезки AC и BC.
2. Угол AOB равен 40°, а угол BOC равен 80°. Чему равен угол между биссектрисами углов AOB и BOC? Рассмотрите все возможные случаи.
3. Точки A, B, C, D последовательно расположены на одной прямой, $AB : BC = 3 : 4$, $BC : CD = 2 : 5$. Найдите отношение $AB : CD$.
4. Найдите величину угла между часовой и минутной стрелкой часов в 10:40.
5. Отрезок AD, длина которого равна 28, разделен точками B и C на три отрезка AB, BC и CD. Расстояние между серединами отрезков AB и CD равно 16. Найдите длину отрезка BC.
6. На прямой отметили четыре точки A, B, C и D. Они являются концами шести отрезков. Выписали длины этих отрезков (в порядке возрастания). Могли ли быть выписаны числа: (а) 1, 2, 3, 4, 5, 6; (б) 1, 1, 1, 2, 2, 4?
7. Начертите четыре луча OA, OB, OC и OD с общим началом так, чтобы на этом чертеже нашлись углы в 100°, 110°, 120°, 130° и 140°.
8. Провели 4 прямые так, что любые две из них пересекаются. Отметили все точки пересечения этих прямых. Сколько точек могло быть отмечено, если
(а) никакие три прямые не проходят через одну точку;
(б) могут найтись тройки прямых, проходящий через одну точку?
9. (а) Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 7 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 3 точки?

   (б) Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 11 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 4 точки?

karusel.desc.ru ~ 42 ~

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Занятие посвящено геометрическим задачам про отрезки и углы. Кроме прочих, стоят две цели: (1) научиться считать отношения отрезков и (2) рассматривать разные случаи расположения точек на прямой и углов с общей вершиной.

В решениях задач, в частности, продемонстрирован удобный способ считать отношения отрезков за счёт удачно введенной переменной.

Под углом подразумеваем фигуру, состоящую из двух лучей с общим началом. Считаем, что градусная мера любого угла от 0° до 180°.

Как обычно, предлагаем в начале занятия обсудить с учениками задачи, отмеченные точкой. Задания с номерами — для самостоятельного решения. Рекомендуем разобрать задачу про угол между часовыми стрелками.

- Точки A, B, C расположены на прямой в указанном порядке, $AB : BC = 3 : 4$. Найдите отношения $AB : AC$ и $BC : AC$.

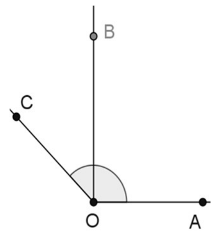
  Ответ: $AB : AC = 3 : 7$, $BC : AC = 4 : 7$.

  Решение. Если $AB : BC = 3 : 4$, то есть такое t, что $AB = 3t$, $BC = 4t$. Тогда получаем:

  $AB : AC = (3t) : (7t) = 3 : 7$,

  $BC : AC = (4t) : (7t) = 4 : 7$.

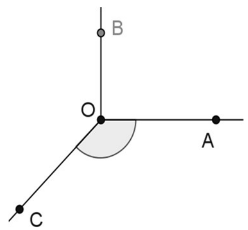
  Комментарий. Вводить переменную таким образом удобно для вычислений.



- Угол AOB — прямой. Угол AOC в полтора раза больше угла AOB. Найдите величину угла BOC.

  Ответ: 45°, 135°.

  Решение. Из условия $\angle AOC = 1{,}5 \cdot \angle AOB = 1{,}5 \cdot 90° = 135°$. Есть 2 варианта, как могут быть расположены углы AOC и AOB: либо лучи OB и OC в одной полуплоскости относительно прямой OA, либо в разных. Эти случаи показаны на рисунках справа.



  В случае 1 получаем: $\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB = 45°$.

  В случае 2 получаем: так как $\angle AOC + \angle AOB = 225° > 180°$, то $\angle BOC = 360° - 225° = 135°$.

- Точки A, B, C и D лежат на одной прямой в указанном порядке. Известно, что $AB : BD = 2 : 3$, $AC : CD = 7 : 5$. Во сколько раз отрезок AD больше отрезка BC?

  Ответ: $AD : BC = 60 : 11$.

  Указание. Выберем удобно переменную. Так как $AB : BD = 2 : 3$, то AD состоит из 5 равных частей (две такие части образуют AB, три другие — BD). Аналогично, так как $AC : CD = 7 : 5$, то AD состоит из $7 + 5 = 12$ равных частей. Тогда поделим отрезок AD на НОК (5; 12) = 60 частей.

  Решение. Пусть $AD = 60t$.
  Получаем:
  $AB = AD : (2 + 3) \cdot 2 = 24t$,
  $AC = AD : (7 + 5) \cdot 7 = 35t$,
  $BC = AC - AB = 35t - 24t = 11t$,
  $AD : BC = (60t) : (11t) = 60 : 11$.

- Точки A, B, M расположены на одной прямой, причём отрезок AM вдвое больше отрезка BM. Найдите AM, если $AB = 6$.

  Ответ: $AM = 4$ или $AM = 12$.

  Решение. По условию $AM = 2BM$. Пусть $BM = t$, $AM = 2t$.

  Точка M может лежать на отрезке AB или вне отрезка (за точкой A или за точкой B). Рассмотрим эти три варианта.

  (1) Если точка M на отрезке AB, то $AM + BM = AB$.
  Отсюда $2t + t = 6$, $t = 2$, $AM = 2t = 4$.

  (2) Если точка M лежит вне отрезка за точку A, то $MA + AB = BM$.
  Отсюда $2t + 6 = t$, $t = -6 = BM$, что невозможно..

  (3) Если точка M лежит вне отрезка за точку B, то $MB + BA = MA$.
  Отсюда $t + 6 = 2t$, $t = 6$, $AM = 2t = 12$.

  Комментарий. Из условия сразу понятно, что точка M не может лежать вне отрезка за точку A. Действительно, в этом случае $MA < MB$, а по условию $MA > MB$.

1. На прямой отмечены точки A, B и C. Известно, что $AB = 5$, отрезок AC длиннее BC в полтора раза. Найдите отрезки AC и BC.

   Ответ: $AC = 15$, $BC = 10$ или $AC = 3$, $BC = 2$.

   Решение. По условию $AC = 1{,}5BC$ или $2AC = 3BC$. Пусть $BC = 2t$, $AC = 3t$.

   Если точка C лежит на отрезке AB, то $AC + BC = AB$, откуда $3t + 2t = 5$, $t = 1$, $BC = 2$, $AC = 3$.

   Точка A не может лежать между точками B и C, так как в этом случае $AC < BC$.

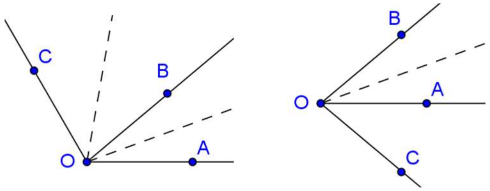
Если точка B лежит между A и C, то $AB + BC = AC$, откуда $5 + 2t = 3t$, $t = 5$, $BC = 10$, $AC = 15$.

Комментарий. Обратите внимание, что если даны точки A, B и положительное число d, не равное 1, то найдутся 2 точки C, что $AC : BC = d$. При этом одна точка лежит на отрезке AB, другая вне отрезка AB.

2. Угол AOB равен 40°, а угол BOC равен 80°. Чему равен угол между биссектрисами углов AOB и BOC? Рассмотрите все возможные случаи.

Ответ: 20° или 60°.

Решение. Возможны два взаимных расположения углов AOB и BOC:
лучи OA и OC в разных полуплоскостях относительно OB (рисунок слева),
лучи OA и OC в одной полуплоскости относительно OB (рисунок справа),



В первом случае, не трудно понять по рисунку, что угол между биссектрисами равен полусумме углов AOB и BOC, то есть $(40° + 80°) : 2 = 60°$.

Во втором случае (на рисунке биссектриса угла BOC — луч OA) угол между биссектрисами равен полуразности углов AOB и BOC, то есть $(80° - 40°) : 2 = 20°$.

3. Точки A, B, C, D последовательно расположены на одной прямой, $AB : BC = 3 : 4$, $BC : CD = 2 : 5$. Найдите отношение $AB : CD$.

Ответ: 3 : 10.

Решение. Пусть $AB = 3t$. Из равенства $AB : BC = 3 : 4$ следует, что $BC = 4t$. Из условия $BC : CD = 4t : CD = 2 : 5$, откуда $CD = 4t \cdot 5 : 2 = 10t$. Значит, $AB : CD = 3t : 10t = 3 : 10$.

4. Найдите величину угла между часовой и минутной стрелкой часов в 10:40.

Ответ: 80°.

Указание. Не нужно забывать, что часовая стрелка сдвинется с числа 10.

Решение. За 10 минут минутная стрелка сдвинется на $360° : 6 = 60°$, а часовая — на $30° : 6 = 5°$. Значит, в 10:40 часовая сдвинется от 00:00 на $30° \cdot 10 + 5° \cdot 4 = 320°$, а минутная — на $60° \cdot 4 = 240°$. Искомый угол равен $320° - 240° = 80°$.

5. Отрезок AD, длина которого равна 28, разделен точками B и C на три отрезка AB, BC и CD. Расстояние между серединами отрезков AB и CD равно 16. Найдите длину отрезка BC.

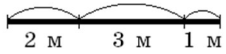
Ответ: 4.

Решение. Сумма длин половинок отрезков AB и CD равна $28 - 16 = 12$. Тогда $AB + CD = 24$, $BC = AD - (AB + CD) = 28 - 24 = 4$.

6. На прямой отметили четыре точки A, B, C и D. Они являются концами шести отрезков. Выписали длины этих отрезков (в порядке возрастания). Могли ли быть выписаны числа: (а) 1, 2, 3, 4, 5, 6; (б) 1, 1, 1, 2, 2, 4?

(а) Ответ: такое возможно.

Решение. Точки могли быть расположены так, как показано на рисунке:

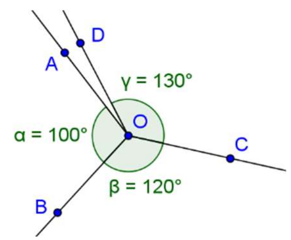


(б) Ответ: нет, не могли.

Решение. Расстояния между несоседними точками не могут равняться 1 (как сумма двух или трёх натуральных чисел). Значит, все три расстояния между соседями равны 1. Но тогда расстояние между крайними точками равно 3, а оно наибольшее и должно равняться 4. Противоречие.

7. Начертите четыре луча OA, OB, OC и OD с общим началом так, чтобы на этом чертеже нашлись углы в 100°, 110°, 120°, 130° и 140°.

Решение. Лучи можно расположить, например, так, как показано на рисунке справа.



Углы величиной 100°, 120° и 130° отмечены на рисунке.

Также $\angle AOD = 360° - 100° - 120° - 130° = 10°$, поэтому $\angle BOD = 110°$, $\angle AOC = 140°$.

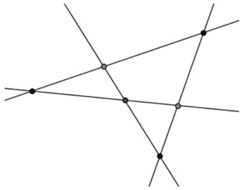
Комментарий. Как придумать такой пример? Расположить все лучи в одной полуплоскости не получится. Поэтому стоит заметить, что $360° = 100° + 120° + 140°$, и расположить лучи OA, OB и OC так, чтобы образовались углы 100°, 120°, 140°. Луч OD после этого подбирается не сложно.

8. Провели 4 прямые так, что любые две из них пересекаются. Отметили все точки пересечения этих прямых. Сколько точек могло быть отмечено, если
(а) никакие три прямые не проходят через одну точку;

(б) могут найтись тройки прямых, проходящий через одну точку?

(а) Ответ: 6.

Решение. Нетрудно получить ответ, нарисовав картинку.



Каждая точка — пересечение двух прямых. Поэтому, количество точек — число способов выбрать две прямые из четырёх, то есть $4 \cdot 3 : 2 = 6$.

(б) Ответ: 1, 4 или 6.

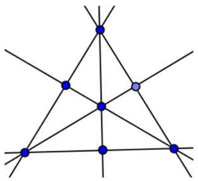
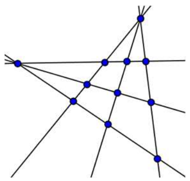
Решение. (1) Если нет трёх прямых, проходящих через одну точку, то получится 6 точек пересечения. (2) Если 3 прямые проходят через одну точку, а четвертая пересекает эти три прямые в разных точках, то будет $1 + 3 = 4$ точки. (3) Если все четыре прямые проходят через одну точку, то точка пересечения одна.

Замечание. Интересно также рассмотреть ситуации, когда некоторые прямые могут не пересекаться (быть параллельными). Тогда возможно 0, 1, 3, 4 или 6 точек пересечения.

9. (а) Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 7 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 3 точки?

(б) Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 11 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 4 точки?

Ответ: можно, примеры показаны на рисунках.

(а)  (б)  или