



## Блок 14. Десятичная запись числа

### Задания Интернет-карусели (2020)

1. У натурального числа  $N$  стёрли последнюю цифру, результат сложили с  $N$ , получив в сумме 2020. Найдите  $N$ .
2. Номер квартиры Пети равен числу, которое в 17 раз больше своей последней цифры. Каков же номер этой квартиры?
3. В записи натурального числа встречаются только цифры 0, 3, 5 и 7. Никакие две из них не встречаются одинаковое число раз. Какое наименьшее число обладает таким свойством?
4. Есть три карточки с различными цифрами. Петя сложил из них число  $A$  — наибольшее возможное трёхзначное число. Вася сложил из них число  $B$  — следующее по величине трёхзначное число. Оказалось, что  $A + B = 1233$ . Найдите число  $A$ .
5. Паша написал большое натуральное число, сумма цифр которого 2020. Вася для каждой цифры от 0 до 9 выписал, сколько раз она встречается в записи этого числа,  $N$  — максимальное из этих 10 чисел. Какое наименьшее значение может иметь число  $N$ ?
6. Третьеклассник Миша выписал все трёхзначные числа, в каждом из которых есть цифры 1, 2 и 3. Чему равна сумма выписанных Мишей чисел?
7. В ряд выписаны в некотором порядке цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 (каждая — один раз). Маруся выписала все пятизначные числа, которые образуют 5 рядом стоящих цифр, и нашла их сумму. Какая наибольшая сумма могла получиться у Маруси?
8. Найдите такое натуральное число, в котором можно убрать одну цифру так, что оно уменьшится на 2020.
9. Очень умные Петя и Вася выписывают трёхзначные числа. Петя выписывает такие числа, у которых первая цифра равна сумме двух других, а Вася такие, у которых последняя цифра равна сумме двух других. Один из них выписал больше чисел. На сколько больше?
10. Петя загадал два (натуральных) двузначных числа  $A$  и  $B$ . Число  $A$  в 2 раза больше числа  $B$ , а одна из цифр числа  $B$  равна сумме цифр числа  $A$ . Найдите число  $A$ .
11. Третьеклассник Миша выписал все четырёхзначные числа, в каждом из которых в записи две цифры 3 и две цифры 4. Чему равна сумма выписанных Мишей чисел?
12. Между цифрами двузначного числа  $N$  вставили цифру 8. Полученное число в 12 раз больше исходного. Найдите  $N$ .
13. Третьеклассник Миша выписал все четырёхзначные числа, в каждом из которых в записи есть цифры 0, 1, 2, 3. Чему равна сумма выписанных Мишей чисел?



14. Было написано шестизначное число  $A$ . Его запись изменили: его первую цифру, равную 2, откинули и написали её справа. Получили число в 3 раза больше  $A$ . Найдите  $A$ .
15. Шифр кодового замка является двузначным числом. Кот забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Подскажите коту, сколько возможных вариантов кода, удовлетворяющих этому условию?

## Блок 14. Десятичная запись числа

### Задания Интернет-карусели (2020). Указания и решения

- Задания интернет-карусели традиционно не упорядочены по сложности. При разборе задач можно выбирать иной порядок, например, по методам, используемых при решении.

1. У натурального числа  $N$  стёрли последнюю цифру, результат сложили с  $N$ , получив в сумме 2020. Найдите  $N$ .

Ответ: 1837.

Решение. Пусть в  $N$  стёрли последнюю цифру  $b$  и получили число  $a$ . Тогда из условия  $N + a = (10a + b) + a = 11a + b = 2020 = 183 \cdot 11 + 7$ , откуда однозначно определяется  $a = 183, b = 7$ .

Указание. Можно решить задачу как ребус  $ABCD + ABC = 2020$ , где разные цифры могут быть одинаковыми цифрами.

2. Номер квартиры Пети равен числу, которое в 17 раз больше своей последней цифры. Каков же номер этой квартиры?

Ответ: 85.

Указание: найдите подходящие варианты среди чисел  $1 \cdot 17, 2 \cdot 17, \dots, 9 \cdot 17$ .

Решение. Последняя цифра числа не меняется при умножении на 17. Это может быть только 0 или 5. Первый вариант не подходит по условию, во втором случае номер квартиры —  $17 \cdot 5 = 85$ .

3. В записи натурального числа встречаются только цифры 0, 3, 5 и 7. Никакие две из них не встречаются одинаковое число раз. Какое наименьшее число обладает таким свойством?

Ответ: 3000033557.

Решение. В искомом числе не менее  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  цифр. Число 3000033557 минимально возможное, так как первая цифра минимально возможная, и дальнейшие цифры минимальны с учётом тех, что уже стоят.

4. Есть три карточки с различными цифрами. Петя сложил из них число  $A$  — наибольшее возможное трехзначное число. Вася сложил из них число  $B$  — следующее по величине трёхзначное число. Оказалось, что  $A + B = 1233$ . Найдите число  $A$ .

Ответ: 621 или 630

Указание:  $396 + 612 = 1233, 630 + 603 = 1233$ .

Решение. Пусть на карточках цифры  $a, b, c$ , причём  $a > b > c$ . Тогда наибольшее число  $\overline{abc}$ , следующее по величине —  $\overline{acb}$ . Из условия  $\overline{abc} + \overline{acb} = 1233$ , то есть  $200a + 11(b + c) = 1233$ , откуда  $a = 6, b + c = 3$ . Тогда либо  $b = 3, c = 0$ , либо  $b = 2, c = 1$ , откуда следует ответ.

5. Паша написал большое натуральное число, сумма цифр которого 2020. Вася для каждой цифры от 0 до 9 выписал, сколько раз она встречается в записи этого числа,  $N$  — максимальное из этих 10 чисел. Какое наименьшее значение может иметь число  $N$ ?

Ответ: 45.

Решение. Если бы каждая цифра встречалась не более 44 раз, то сумма цифр числа была бы не более  $(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \cdot 44 = 1980$ , то есть менее 2020. Случай, когда каждая цифра встречается не более 45 раз, возможен. Если числе все цифры, кроме 5, встречаются по 45 раз, а цифра 5 — 44 раза, то сумма его цифр равна  $(1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9) \cdot 45 + 5 \cdot 44 = 2020$ .

6. Третьеклассник Миша выписал все трёхзначные числа, в каждом из которых есть цифры 1, 2 и 3. Чему равна сумма выписанных Мишей чисел?

Ответ: 1332.

Решение: Сумма цифр в каждом разряде равна  $2 \cdot (1 + 2 + 3) = 12$ , так как в каждом разряде каждая из цифр встречается дважды. Поэтому общая сумма чисел равна  $12 \cdot 111 = 1332$ .

7. В ряд выписаны в некотором порядке цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 (каждая — один раз). Маруся выписала все пятизначные числа, которые образуют 5 рядом стоящих цифр, и нашла их сумму. Какая наибольшая сумма могла получиться у Маруси?

Ответ: 387379.

Указание: цифры выписаны в порядке 123498765.

Решение. Первая цифра ряда  $a_1$  даёт в сумму  $10000a_1$ , так как входит только в одно число в первом (с начала) разряде. Вторая цифра ряда  $a_2$  даёт в сумму  $11000a_2$ , так как входит в два числа: в одно — в первом разряде, во другое — во втором. Рассуждая аналогично, получаем, что остальные цифры дают в сумму  $11100a_3, 11110a_4, 11111a_5, 1111a_6, 111a_7, 11a_8, a_9$ .

Чтобы сумма была наибольшей,  $a_5$  надо заменить на 9, так как она даёт наибольший вклад. Следующая по вкладу —  $a_4 = 8$ , далее получаем  $a_3 = 7, a_2 = 6, a_1 = 5, a_6 = 4, a_7 = 3, a_8 = 2, a_9 = 1$ .

В таком случае сумма равна  $10000 \cdot 5 + 11000 \cdot 6 + 11100 \cdot 7 + 11110 \cdot 8 + 11111 \cdot 9 + 1111 \cdot 4 + 111 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 1 = 387379$ .

8. Найдите такое натуральное число, в котором можно убрать одну цифру так, что оно уменьшится на 2020.

Ответ: 2240, 2241, 2242, ..., 2249.

Решение. Число не более чем 5-значное, пусть оно равно  $\overline{abcde}$  (возможно, первая цифра равна нулю). Цифра в разряде десятков ненулевая, значит, убрали цифру из разряда единиц или десятков.

Если убрали последнюю цифру, то  $10\overline{abcd} + e - \overline{abcd} = 2020$ ,  $9\overline{abcd} + e = 2020$ .

Если убрали предпоследнюю цифру, то  $(100\overline{abc} + 10d + e) - (10\overline{abc} + e) = 2020$ ,  $9\overline{abc} + d = 2020$ ,  $\overline{abcd} = 224$ ,  $d$  — любая цифра.

Значит, подходят все числа от 2240 до 2249.

9. Очень умные Петя и Вася выписывают трехзначные числа. Петя выписывает такие числа, у которых первая цифра равна сумме двух других, а Вася такие, у которых последняя цифра равна сумме двух других. Один из них выписал больше чисел. На сколько больше?

Ответ. 9.

Решение. Если Васино число перевернуть, то получится Петино число. При этом у Пети есть свои «лишние» числа, которые оканчиваются на 0. Это 110, 220, ..., 990 — всего 9 штук.

10. Петя загадал два (натуральных) двузначных числа  $A$  и  $B$ . Число  $A$  в 2 раза больше числа  $B$ , а одна из цифр числа  $B$  равна сумме цифр числа  $A$ . Найдите число  $A$ .

Ответ: 34 и 50

Указание: подходят 34 и 17, 50 и 25.

Решение. Пусть  $B = \overline{xy}$ . При умножении его на 2, должен быть переход через разряд (то есть  $y \geq 5$ ), иначе сумма цифр числа  $A$  будет больше  $y$ . Значит, первая цифра числа  $A$  равна  $(2x + 1)$ , вторая —  $(2y - 10)$ . Так как  $A > B$ , то первая цифра числа  $B$  не может быть равной сумме цифр  $A$ . Значит,  $(2x + 1) + (2y - 10) = y$ , откуда получаем  $2x + y = 9$ . Вспоминая условие  $y \geq 5$ , получаем числа  $\overline{xy}$ , равные 17 и 25. В этом случае искомое число равно 34 или 50.

Замечание. Можно взять другие переменные, получив более длинные рассуждения. Если  $A = \overline{xy}$ , а первая цифра числа  $B$  равна  $z$ , то  $10x + y = 2(10z + x + y)$ , откуда  $y = 8x - 20z = 4(2x - 5z)$ . Значит,  $y$  равно 0, 4 или 8 (так как кратно 4). Остается рассмотреть небольшое число случаев.

11. Третьеклассник Миша выписал все четырёхзначные числа, в каждом из которых в записи две цифры 3 и две цифры 4. Чему равна сумма выписанных Мишей чисел?

Ответ: 23331.

Решение. Миша выписал числа 3344, 3434, 4334, 3443, 4343, 4433. Видно, что в каждом разряде сумма цифр равна  $3 \cdot (3 + 4) = 21$ , то есть сумма всех чисел равна  $21 \cdot 1111 = 23331$ .

12. Между цифрами двузначного числа  $N$  вставили цифру 8. Полученное число в 12 раз больше исходного. Найдите  $N$ .

Ответ: 40.

Решение. Если  $N = \overline{xy}$ , то из условия получаем  $100x + 80 + y = 120x + 12y$ , откуда  $80 = 20x + 11y$ . Из соотношения видно, что  $y = 0$ , тогда  $x = 4$ . Искомое число — 40.

13. Третьеклассник Миша выписал все четырёхзначные числа, в каждом из которых в записи есть цифры 0, 1, 2, 3. Чему равна сумма выписанных Мишей чисел?

Ответ: 38664.

Решение. Найдём сумму всех «чисел» от 0123 до 3210. Всего 24 числа, сумма цифр в каждом разряде равна  $6 \cdot (0 + 1 + 2 + 3) = 36$ , откуда сумма чисел равна  $36 \cdot 1111 = 39996$ . С цифры «0» начинаются 6 чисел от 0123 до 0321, их сумма равна  $2 \cdot (1 + 2 + 3) \cdot 111 = 1332$ . Искомая сумма равна  $39996 - 1332 = 38664$ .

14. Было написано шестизначное число  $A$ . Его запись изменили: его первую цифру, равную 2, откинули и написали её справа. Получили число в 3 раза больше  $A$ . Найдите  $A$ .

Ответ: 285714

Решение. Если  $x$  — число, полученное из искомого отбрасыванием первой цифры, то из числа  $200000 + x$  получили число  $10x + 2$ .

Тогда  $3(200000 + x) = 10x + 2$ ,  $7x = 600000 - 2$ ,  $x = 85714$ ,  $A = 285714$ .

15. Шифр кодового замка является двузначным числом. Кот забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Подскажите коту, сколько возможных вариантов кода, удовлетворяющих этому условию?

Ответ: 9.

Указание: возможен код 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 или 99.

Решение. Пусть искомый код  $ab$ . Тогда по условию  $10a + b = a + b + ab$ ,  $9a = ab$ . Поскольку  $a \neq 0$ , то  $b = 9$ . Отсюда следует, что в качестве кода подходят все двузначные числа, оканчивающиеся на 9.