

Блок 13. Подсчёт двумя способами

Задания Интернет-карусели (2019)

1. В детском саду провели соревнования по крестикам-ноликам. Играли 15 ребят, всего сыграно 70 партий. За победу давали 3 конфеты, за ничейный результат — 2 конфеты, за проигрыш — 1 конфету. Все, кроме Коли, сказали, сколько конфет они получили: 10, 10, 12, 12, 15, 15, 15, 18, 20, 22, 25, 26, 30, 30. Сколько конфет заработал Коля?
2. Петя сегодня купил 12 плюшек по 10 руб. 15 коп., а вчера на ту же сумму — ватрушки по 8 руб. 12 коп. Сколько ватрушек купил Петя вчера?
3. Четыре девочки — Маша, Катя, Даша и Наташа — сосчитали сколько в сумме лет каждой паре из них. Они получили числа 13, 15, 20, 20, 25, 27. Сколько лет Наташе, если она самая взрослая из девочек?
4. В вершинах куба расставлены числа. На каждом ребре записана сумма чисел на его концах. На боковых ребрах стоят числа 11, 13, 14 и 16. Когда куб поставили на другую грань, на боковых ребрах оказались числа 7, 10, 15 и K . Когда куб поставили на третью грань, на боковых ребрах оказались числа 5, 12, 25 и N . Какие значения может иметь разность $K - N$?
5. Грани игрального кубика пронумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Для каждой вершины выписали сумму чисел на гранях с этой вершиной. В одной из вершин получилась сумма 10. Чему сумма в противоположной вершине?
6. Команды России и Бразилии по теннису состоят из 60 спортсменов, среди которых есть и мужчины, и женщины. Все они участвовали в 60 матчах, в каждом из которых бразильский теннисист сыграл с российским. В играх между мужчинами всегда побеждали бразильцы, между женщинами — всегда россиянка. В играх мужчины против женщины всегда выигрывал мужчина. В итоге россияне выиграли в три раза больше матчей, чем бразильцы. Сколько женщин в сборной Бразилии?
7. У Васеньки есть карточки с цифрами 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6. Он расставляет их в разном порядке по кругу, затем выписывает 8 четырехзначных чисел, образованных 4 цифрами, стоящими по часовой стрелке подряд, после чего находит сумму этих чисел. Какая наибольшая сумма у него может получиться?
8. Бабушка посылает sms-ки своим трем внукам — Машеньке, Сашеньке и Дашеньке. Каждое утро, с тех пор как бабушка научилась посылать сообщения, какой-то из внуков посылается 5, другой 7, а третьей 9 sms-ок. Однажды вечером внуки посчитали общее число сообщений от бабушки, каждая насчитала у себя по 100 sms-ок. При этом Машенька и Сашенька точно считают хорошо, а Дашенька могла ошибиться при счете, но не более чем на 10. Сколько на самом деле sms-ок пришло Дашеньке от бабушки за все время?

9. В вершинах каждого квадрата написаны цифры 1, 2, 4 и 3 в указанном порядке по часовой стрелке. Машенька сложила эти квадраты в стопку, при этом она могла их поворачивать или даже переворачивать. В левом верхнем углу сумма оказалась 1234, в правом верхнем — 1444, а в правом нижнем — 1181. Какой будет сумма в левом нижнем углу?
10. В клетки таблицы 3×3 вписаны неотрицательные (не обязательно различные) целые числа. Васенька посчитал 6 сумм этих чисел по строкам и столбцам. У него получились (в каком-то порядке) суммы 1, 2, 3, 4, 5. Чему может быть равна оставшаяся сумма, если все 6 сумм были различны?
11. Прямоугольник разделен на четыре прямоугольника А, Б, В и Г, как показано на рисунке. Периметр прямоугольника А на 3 больше периметра прямоугольника В и на 4 меньше периметра прямоугольника Б. Периметр прямоугольника Б вдвое больше периметра прямоугольника В. Чему равен периметр прямоугольника Г?
12. В каждую клетку таблицы 4×4 записали число. Сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна 10. Нашли суммы чисел в каждом из столбцов. Все они равны S . Чему равно S ?
13. Машенька учится в стране, где оценки ставятся по 50-балльной шкале. С начала года у нее было 15 оценок по математике и средний балл был 28. Сегодня Машенька получила еще одну оценку и повысила свой средний балл до 29. Какую оценку получила сегодня Машенька?
14. На Новый Год в компании друзей, где более 2 человек, каждый подарил по 4 подарка. Одному и тому же другу можно дарить несколько подарков. Каждый, кроме Вовы, получил по 5 подарков. Сколько человек могло быть в компании?
15. В квадрате 3×3 стоят числа. Известно, что во второй строке сумма чисел в 3 раза больше, чем в первом столбце, а во втором столбце — в 2 раза больше, чем в первой строке. Кроме того, в 3 столбце сумма в 3 раза больше, чем во второй строке, а в 3 строке — в 2 раза больше, чем в 3 столбце. Во сколько раз сумма чисел в 1 строке больше суммы чисел в 1 столбце?

А	Б
В	Г

Блок 13. Подсчёт двумя способами

Задания Интернет-карусели (2019). Указания и решения

В большей части задач какая-то величина считается двумя способами, то есть является важным промежуточным звеном от данных величин к искомому.

1. В детском саду провели соревнования по крестикам-ноликам. Играли 15 ребят, всего сыграно 70 партий. За победу давали 3 конфеты, за ничейный результат — 2 конфеты, за проигрыш — 1 конфету. Все, кроме Коли, сказали, сколько конфет они получили: 10, 10, 12, 12, 15, 15, 15, 18, 20, 22, 25, 26, 30, 30. Сколько конфет заработал Коля?

Ответ: 20.

Указание. Найдите общее число выданных конфет.

Решение. За каждую игру давали либо $3 + 1 = 4$, либо $2 + 2 = 4$ конфеты. Тогда всего было разыграно $70 \cdot 4 = 280$ конфет. Сумма указанных чисел равна 260. Значит, у Коли было $280 - 260 = 20$ конфет.

2. Петя сегодня купил 12 плюшек по 10 руб. 15 коп., а вчера на ту же сумму — ватрушки по 8 руб. 12 коп. Сколько ватрушек купил Петя вчера?

Ответ: 15.

Указание. Найдите сумму, потраченную вчера и сегодня.

Решение. Сегодня Петя потратил $12 \cdot 1015 = 12\,180$ коп. Вчера он потратил столько же денег, значит, купил $12180 : 812 = 15$ ватрушек.

3. Четыре девочки — Маша, Катя, Даша и Наташа — сосчитали сколько в сумме лет каждой паре из них. Они получили числа 13, 15, 20, 20, 25, 27. Сколько лет Наташе, если она самая взрослая из девочек?

Ответ: 16

Указание. Определите, каким девочкам какая сумма соответствует.

Решение. Пронумеруем девочек № 1, № 2, № 3 и № 4 по старшинству.

Наибольшая сумма 27 — возраст девочек № 3 и № 4. Следующая сумма по величине 25 — возраст № 2 и № 4. Значит, № 3 старше № 2 на $27 - 25 = 2$ года.

Аналогично суммы 13 и 15 — про пары девочек № 1 и № 2, № 1 и № 3. Значит, сумма возрастов № 2 и № 3 равна 20 лет.

Сумма № 2 и № 3 равна 20, разность — 2. Значит, они равны 9 и 11. Тогда возраст самой старшей $27 - 11 = 16$ лет.

4. В вершинах куба расставлены числа. На каждом ребре записана сумма чисел на его концах. На боковых ребрах стоят числа 11, 13, 14 и 16. Когда куб поставили на другую грань, на боковых ребрах оказались числа 7, 10, 15 и K . Когда куб поставили на третью грань, на боковых ребрах оказались числа 5, 12, 25 и N . Какие значения может иметь разность $K - N$?

Ответ: 10.

Указание. Определите, как из условия найти общую сумму чисел в вершинах.

Решение. Сумма всех чисел в вершинах равна $11 + 13 + 14 + 16 = 54$, $7 + 10 + 15 + K = 32 + K$, $5 + 12 + 25 + N = 42 + N$.

Значит, $K = 54 - 32 = 22$, $N = 54 - 42 = 12$, $K - N = 22 - 12 = 10$.

5. Грани игрального кубика пронумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Для каждой вершины выписали сумму чисел на гранях с этой вершиной. В одной из вершин получилась сумма 10. Чему сумма в противоположной вершине?

Ответ: 11.

Указание. Как суммы в двух противоположных вершинах связаны с суммой всех чисел на гранях?

Решение. Две противоположные вершины содержатся по разу во всех 6 гранях. Поэтому сумма на противоположной вершине $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - 10 = 11$.

6. Команды России и Бразилии по теннису состоят из 60 спортсменов, среди которых есть и мужчины, и женщины. Все они участвовали в 60 матчах, в каждом из которых бразильский теннисист сыграл с российским. В играх между мужчинами всегда побеждали бразильцы, между женщинами — всегда россиянка. В играх мужчины против женщины всегда выигрывал мужчина. В итоге россияне выиграли в три раза больше матчей, чем бразильцы. Сколько женщин в сборной Бразилии?

Ответ: 45

Решение. Россияне выиграли у всех женщин и проиграли всем мужчинам. Поэтому в бразильской сборной было в 3 раза больше женщин, чем мужчин, то есть 45.

7. У Васеньки есть карточки с цифрами 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6. Он расставляет их в разном порядке по кругу, затем выписывает 8 четырехзначных чисел, образованных 4 цифрами, стоящими по часовой стрелке подряд, после чего находит сумму этих чисел. Какая наибольшая сумма у него может получиться?

Ответ: 33330.

Решение. Каждая цифра будет по разу в 4 числах: в одном — в разряде тысяч, в следующем — в разряде сотен, в следующем — в разряде десятков, в четвертом — в разряде единиц. То есть, например, цифра 2 будет вносить в общую сумму $2 \cdot 1111 = 2222$. Значит, итоговая сумма постоянна и вне зависимости от порядка цифр равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6) \cdot 1111 = 30 \cdot 1111 = 33330$.

8. Бабушка посылает sms-ки своим трем внукам — Машеньке, Сашеньке и Дашеньке. Каждое утро, с тех пор как бабушка научилась посылать сообщения, какой-то из внуков посылается 5, другой 7, а третьей 9 sms-ок. Однажды вечером внуки посчитали общее число сообщений от бабушки, каждая насчитала у себя по 100 sms-ок. При этом Машенька и Сашенька точно считают хорошо, а Дашенька могла ошибиться при счете, но не более чем на 10. Сколько на самом деле sms-ок пришло Дашеньке от бабушки за все время?

Ответ: 94.

Указание. Общее число sms-ок ограничено по количеству и кратно числу отправленных сообщений за каждое утро.

Решение. Общее число сообщений их количество от $300 - 10 = 294$ до 300. Оно кратно $5 + 7 + 9 = 21$. Из указанного промежутка на 21 делится только число 294. Тогда у Дашеньки было 94 sms-ки, она ошиблась на 6.

9. В вершинах каждого квадрата написаны цифры 1, 2, 4 и 3 в указанном порядке по часовой стрелке. Машенька сложила эти квадраты в стопку, при этом она могла их поворачивать или даже переворачивать. В левом верхнем углу сумма оказалась 1234, в правом верхнем — 1444, а в правом нижнем — 1181. Какой будет сумма в левом нижнем углу?

Ответ: 971

Указание. Как соотносятся суммы в противоположных углах стопки?

Решение. В каждом квадрате сумма чисел в противоположных углах равна 5. Поэтому сумма всех чисел в левом верхнем и правом нижнем углах равна сумме всех чисел в правом верхнем и левом нижнем углу. Значит, сумма в левом нижнем углу равна $1234 + 1181 - 1444 = 971$.

10. В клетки таблицы 3×3 вписаны неотрицательные (не обязательно различные) целые числа. Васенька посчитал 6 сумм этих чисел по строкам и столбцам. У него получились (в каком-то порядке) суммы 1, 2, 3, 4, 5. Чему может быть равна оставшаяся сумма, если все 6 сумм были различны?

Ответ: 7, 9.

Указание: сумма всех чисел равна сумме строк и равна сумме столбцов.

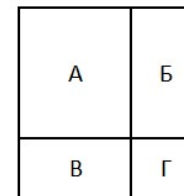
Решение. Пусть искомое число равно N . Три из этих чисел — суммы в строчках, другие две — в столбцах. Общая сумма в квадрате равна сумме столбцов и, в то же время, сумме строк. Значит, сумма трёх чисел из 1, 2, 3, 4, 5, N равна сумме оставшихся трёх.

Во-первых, $N > 5$. Во-вторых, N нечётно, так как сумма $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + N$ должны быть чётной. В-третьих, N максимально, если $3 + 4 + 5 = 1 + 2 + N$, то есть $N \leq 9$. Вывод: $N = 7$ или $N = 9$.

Оба варианта возможны. Примеры расстановок (с суммами по строкам и столбцам) показаны на рисунке:

5	4	1	0	5	5	0	0
4	2	2	0	4	4	0	0
2	1	0	1	3	0	1	2
	7	3	1		9	1	2

11. Прямоугольник разделен на четыре прямоугольника А, Б, В и Г, как показано на рисунке. Периметр прямоугольника А на 3 больше периметра прямоугольника В и на 4 меньше периметра прямоугольника Б. Периметр прямоугольника Б вдвое больше периметра прямоугольника В. Чему равен периметр прямоугольника Г?



Ответ: 11.

Указание: периметр всего прямоугольника равен сумме периметров противоположных частей.

Решение. Можно найти периметры прямоугольников А, Б и В. Пусть периметр В равен x . Тогда периметр А — $x + 3$, периметр Б — $x + 3 + 4 = x + 7$. Из условия получаем $x + 7 = 2x$, откуда $x = 7$. Значит, периметры прямоугольников А, Б и В равны соответственно 10, 14 и 7.

Заметим, сумма периметров А и Г равна периметру большого прямоугольника и сумма периметров Б и В равна периметру большого прямоугольника. Поэтому, периметр Г равен $7 + 14 - 10 = 11$.

12. В каждую клетку таблицы 4×4 записали число. Сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна 10. Нашли суммы чисел в каждом из столбцов. Все они равны S . Чему равно S ?

Ответ: 10.

Указание: сумму всех чисел в квадрате можно найти как сумму квадратиков и как сумму столбцов.

Решение. В квадрат 4×4 можно поделить на 4 квадрата 2×2 , поэтому общая сумма чисел в квадрате равна $4 \cdot 10 = 40$. Эта же общая сумма равна сумме по столбцам, следовательно, в каждом столбце сумма равна $40 : 4 = 10$.

13. Машенька учится в стране, где оценки ставятся по 50-балльной шкале. С начала года у нее было 15 оценок по математике и средний балл был 28. Сегодня Машенька получила еще одну оценку и повысила свой средний балл до 29. Какую оценку получила сегодня Машенька?

Ответ: 44

Указание: как изменилась общая сумма баллов?

Решение. С начала года до сегодняшнего дня сумма всех оценок Машеньки была равна $15 \cdot 28 = 420$. Сегодня сумма оценок стала равной $16 \cdot 29 = 464$, поэтому была получена оценка $464 - 420 = 44$.

14. На Новый Год в компании друзей, где более 2 человек, каждый подарил по 4 подарка. Одному и тому же другу можно дарить несколько подарков. Каждый, кроме Вовы, получил по 5 подарков. Сколько человек могло быть в компании?

Ответ: 3, 4, 5

Указание: общее число отданных подарков равно числу полученных подарков.

Решение. Пусть в компании n человек, а Вова получил x подарков. Тогда общее число подарков равно $4n = 5n - 5 + x$, откуда $x = 5 - n$. По условию $x \geq 0$, $n > 2$, откуда n равно 3, 4 или 5. Не трудно понять, что все три варианта возможны.

15. В квадрате 3×3 стоят числа. Известно, что во второй строке сумма чисел в 3 раза больше, чем в первом столбце, а во втором столбце — в 2 раза больше, чем в первой строке. Кроме того, в 3 столбце сумма в 3 раза больше, чем во второй строке, а в 3 строке — в 2 раза больше, чем в 3 столбце. Во сколько раз сумма чисел в 1 строке больше суммы чисел в 1 столбце?

Ответ: 11.

Указание: сумму всех чисел в квадрате можно найти как сумму строк и как сумму столбцов.

Решение. Пусть в первой строке сумма равна x , в первом столбце — y . Тогда во второй строке сумма равна $3y$, во втором столбце — $2x$, в третьем столбце — $9y$, в третьей строке — $18y$. Сумма всех строк равна сумме всех столбцов, поэтому $x + 3y + 18y = y + 2x + 9y$, откуда $11y = x$. Значит, сумма чисел в первой строке в 11 раз больше, чем в первом столбце.