

## Блок 3. Графы

### Подготовительное занятие

- В Липецкой области есть только такие маршруты автобусов между парами городами: Липецк–Грязи, Данков–Усмань, Задонск–Данков, Грязи–Елец, Усмань–Лебединь, Чаплыгин–Грязи, Лебединь–Задонск, Чаплыгин–Елец, Липецк–Чаплыгин. До каких городов области можно добраться (возможно, с пересадками) на автобусах из Липецка?
- Нарисуйте схемы (графы) к следующим ситуациям:
  - (а) Маша дружит с Катей и Дашей, Даша дружит с Машей и Настей, Настя дружит с Дашей и Катей, Катя дружит с Машей и Настей;
  - (б) у Олега есть 2 сына Петр и Василий, у Петра есть сыновья Николай, Григорий и Михаил;
  - (в) между 9 планетами Солнечной системы летают ракеты по следующим маршрутам: Земля–Меркурий, Плутон–Венера, Земля–Плутон, Плутон–Меркурий, Меркурий–Венера, Уран–Нептун, Нептун–Сатурн, Сатурн–Юпитер, Юпитер–Марс и Марс–Уран;
  - (г) пять команд сыграли между собой круговой турнир, то есть каждая команды сыграла с каждой другой ровно один раз;
  - (д) из всего набора домино у Оли на руках только 5 костей домино: 1-2, 5-2, 3-3, 5-3 и 2-6.
- В город Елец прилетела летающая тарелка с Марса. В ней трое пятируких марсиан, трое трехруких марсиан и шестеро двуруких марсиан.
  - (а) Сколько всего рук у прилетевших марсиан?
  - (б) Руки у марсиан длинные и изгибающиеся. Они все взяли за руки так, что не осталось свободных рук. Сколько получилось рукопожатий?
  - (в) Могут ли они взяться все за руки, если пятируких марсиан не 3, а 4?
- 1. На кружке по математике 7 человек: Антон, Боря, Вова, Глеб, Дима, Евгений и Жора. Известно, что в этой компании у Антона 6 друзей, у Бори — 5, у Вовы и Глеба — по 3, у Димы и Евгения — по 2, у Жоры — всего 1. Выберите всех мальчиков, с которыми дружит Глеб.
- 2. На концерте каждую песню исполняли двое артистов. Всего было 12 артистов, каждый выступил по 5 раз. Сколько было песен?

3. В волшебной стране есть один Цветочный город, 5 городов фей, 15 городов драконов. Из цветочного города выходит 20 дорог, из городов фей и драконов выходит по 5 дорог. Сколько всего дорог в волшебной стране?
4. В некотором государстве 10 городов и 20 дорог. Авиалиния есть между двумя городами в том и только в том случае, если между ними нет дороги. Сколько авиалиний в таком государстве?
5. (а) В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с пятью другими?  
(б) Можно ли придумать семь таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с пятью другими?  
(в) Можно ли разрезать прямоугольник  $5 \times 18$  на доминошки так, чтобы каждая граничила ровно с тремя другими по отрезку ненулевой длины?  
(г) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
6. Вершины графа покрасили в два цвета: красный и синий. Из красных вершин есть ребра только в синие, а из синих — только в красные. Сумма степеней красных вершин — 20. Какой может быть сумма степеней синих?
7. На дискотеке было 6 девочек и 8 мальчиков. Каждая девочка танцевала с 4 мальчиками. Все мальчики танцевали с одинаковым количеством девочек. Со сколькими девочками танцевали мальчики?
8. В классе 26 школьников, из которых 9 — девочки. Каждый мальчик дружит с 5 одноклассниками. Каждая из девочек, кроме Маши, дружит с 9 мальчиками-одноклассниками. Со сколькими мальчиками-одноклассниками дружит Маша?
9. В графе каждая вершина покрашена в синий или зеленый цвет. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелеными, а каждая зеленая — с девятью синими и шестью зелеными.
  - (а) Каких вершин больше — синих или зеленых?
  - (б) Каким может быть наименьшее число синих и зеленых вершин такого графа?