Математика, 10-11 класс (30 ноября 2017)

Задания карусели

1. Дан куб. Провели N прямых в пространстве, каждая из которых проходит через две вершины куба. Любые две проведенные прямые скрещиваются. При какое наибольшем N такое возможно?

2. Какие из утверждений про действительные числа a и b являются верными:

   (1) если $a > b$, $b < c$, то $a + 2017 > c$;
   (2) если $a > b$, $c > d$, то $a + c + 2017 > b + d$;
   (3) если $a > b$, $c < d$, то $a - c + 2017 > b - d$;
   (4) если $a > b$, $c > d$, то $a - c + 2017 > b - d$;
   (5) если $a > b$, $c > d$, то $ac + 2017 > bd$;
   (6) если $a > b$, то $1/a < 1/b + 2017$?

3. Сколько градусов составляют 1,5 радиана?

4. Сумма тупых углов выпуклого N-угольник равна 2017°. Чему равно N?

5. Чему равен наибольший периметр параллелограмма, диагонали которого 6 и 8?

6. Произведение трёх различных двузначных натуральных чисел — квадрат целого числа N. Найдите максимальное значение N.

7. Дан треугольник ABC, $AB = 9$, $BC = 6$, $CA = 10$. Касательная к описанной около треугольника окружности, проведенная в точке B, пересекает прямую AC в точке D. Найдите длину отрезка AD.

8. Дана белый квадрат 9x9, разбитый на клетки 1x1. Петя закрашивает красным цветом N клеток. После этого Вася разрезает квадрат на 27 частей 1x3 или 3x1. Если в части есть 2 красные клетки, то эта часть достается Васе, если меньше — достается Пете. При каком наибольшем N Петя может гарантированно получить больше половины частей?

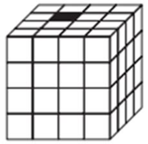
9. Дано уравнение $2\sin^2 x = 1$.

   Какие из указанных серий являются решением данного уравнения?

   (1) $\pm\pi/6 + 2\pi k$, k — любое целое число;
   (2) $\pm\pi/4 + 2\pi k$, k — любое целое число;
   (3) $\pi/4 + \pi k/2$, k — любое целое число;
   (4) $\pm 3\pi/4 + \pi k$, k — любое целое число;
   (5) $(-1)^k \pi/4 + \pi k$, k — любое целое число;
   (6) $-\pi/4 + \pi k/2$, k — любое целое число.

ЦДО ЦПМ (г. Москва)
Международные соревнования «Интернет-карусели»

10. В кубике $4 \times 4 \times 4$ каждая грань разбита на 16 одинаковых квадратиков 1×1. Один квадратик закрашен в чёрный, как показано на рисунке, а остальные — белые.

    Костя за один ход закрашивает чёрным все те квадратики, которые имеют хотя бы одну общую сторону с чёрным квадратиком. Например, после первого хода будет закрашено 5 клеток.

    Каков номер хода, после которого все квадратики будут закрашены?

11. Решите систему уравнений:

    $$\begin{cases}(x-5)\sqrt{y-5} = \sqrt{y-5}, \\ y^2 - 9y + x + 8 = 0.\end{cases}$$

    Чему равна сумма $x + y$?

12. Найдите наименьшее число N, что сумма натуральных чисел от 100 до N кратна 2017.

13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точки P и Q — середины ребер AB и BC, точка O — центр грани $ABCD$, точка E на ребре DD_1 такова, что $DE = 2D_1E$. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся сечением данного куба плоскостью, проходящей через точки P и Q параллельно прямой OE?

14. Решите уравнение $\sqrt[3]{\sqrt[3]{7-x} - x + 6} + \sqrt[3]{7-x} = x - 4$.

15. В круговом турнире участвовали 6 шахматистов. Известно, что в конце турнира у всех участников оказалось разное количество очков (за победу дается 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0). При этом, шахматист, занявший первое место, проиграл хотя бы одну партию. Какое наибольшее количество партий могло быть сыграно в ничью в этом турнире?